შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 113

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

$f(x+yf(x))=f(f(x))+xf(y)$

ჩავსვათ $x=0$ და $y=0$: მივიღებთ $\boxed{f(0)=f(f(0))}$,

ჩავსვათ $x=f(0)$ და $y=0$: მივიღებთ $f(0)=f(f(f(0)))+f(0)^2$

ანუ $f(0)=f(f(0))+f(0)^2$ ანუ $f(0)=f(0)+f(0)^2$ ანუ $\boxed{f(0)=0}$,

ჩავსვათ $y=0$: მივიღებთ $f(x)=f(f(x))+x\cdot f(0)$ ანუ $\boxed{f(x)=f(f(x))}$

რადგანაც $f(x)=f(f(x))$ ცხადია რომ $f(f(\ldots f(f(x))\ldots))=f(x)$.

ჩავსვათ $x=k$ და $y=f(k)$: მივიღებთ $\boxed{f(k+f(k)^2)=f(k)+kf(k)}$

რადგან $f(f(x))=f(x)$ ამიტომ $f(f(k+f(k)^2))=f(k+f(k)^2)$

ანუ $f(f(k)+kf(k))=f(k+f(k)^2)$ ანუ $\boxed{f(f(k)+kf(k))=f(k)+kf(k)}$

ახლა ჩავსვათ $x=f(k)$ და $y=k$: მივიღებთ $\boxed{f(f(k)+kf(k))=f(k)+f(k)^2}$

ე.ი. გამოდის, რომ $f(f(k)+kf(k))=f(k)+kf(k)$ და ასევე ტოლია $(f(k)+f(k)^2)$-ის

ე.ი. მივიღეთ რომ $f(k)+kf(k)=f(k)+f(k)^2$ ანუ $kf(k)=f(k)^2$.

აქ ორი ვარიანტია $f(k)=0$ ან $f(k)=k$. ე.ი. ნებისმიერი k-სთვის $\boxed{f(k)=0 \text{ ან } f(k)=k}$. დავუშვათ მოიძებნება ისეთი a, რომ $a\neq 0$ და $f(a)=0$.

ჩავსვათ $f(x+yf(x))=f(f(x))+xf(y)$ -ში $x=a$, მივიღებთ:

$f(a)=af(y)$. რადგან $f(a)=0$ და $a\neq 0$ ამიტომ $\boxed{f(y)=0}$.

თუ ისეთი a არ მოიძებნა, მაშინ ნებისმიერი x-ისთვის $\boxed{f(x)=x}$

ე.ი. არსებობს ორი ისეთი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს $f(x+yf(x))=f(f(x))+xf(y)$ ტოლობას,

პასუხი: $f(x)=x$ და $f(x)=0$ ფუნქციები.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

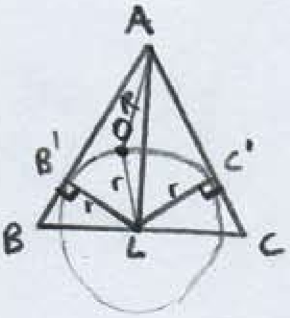
მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 1/3

ამოცანა № 5

გვერდი № 1

ω წრეწირის ცენტრი L-ია, ω ეხება AB-ს და AC-ს, ე.ი. AB-ზე და AC-ზე L-იდან დაშვებული მართობები ტოლია. განვიხილოთ



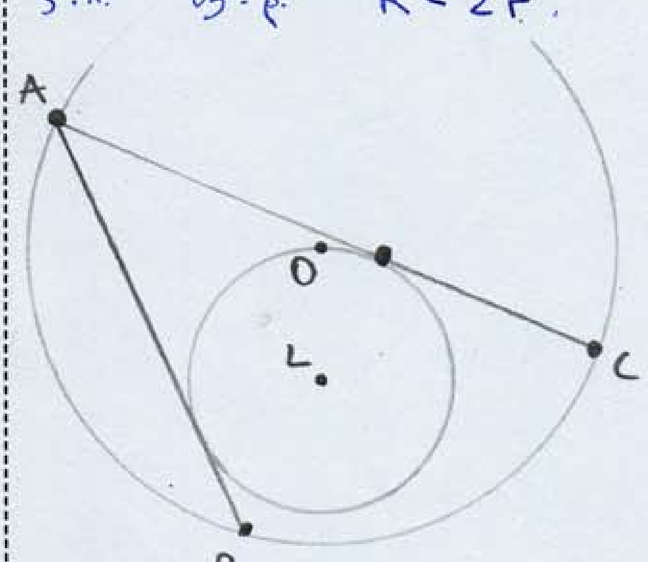
$\triangle AB'L$ და $\triangle AC'L$: $\angle AB'L=\angle AC'L=90^\circ$ და $LB'=LC'$

$AB'=\sqrt{AL^2-B'L^2}$ $AC'=\sqrt{AL^2-C'L^2}$

ე.ი. $AB'=AC'$. ე.ი. $\triangle AB'L=\triangle AC'L$.

ე.ი. $\angle B'AL=\angle C'AL$. ე.ი. AL არის $\angle A$-ს ბისექტრისა.

ამოცანის პირობიდან O არის $B'C'$ რკალზე და არის $\triangle ABC$-ზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი. ამიტომ, გვაქვს $r=LB'=LC'=LO$ და $R=OB=OA=OC$. ანუ გვაქვს ორი წრეწირის რადიუსები r და R. ცხადია, იმისათვის რომ ისინი იკვეთებოდნენ ორ წერტილში ამისათვის O ცენტრის მქონე წრეწირის R რადიუსი უნდა იყოს ω-ს დიამეტრზე, ანუ $2r$-ზე ნაკლები. ე.ი. უ.დ. $R<2r$.



დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვაჩვენოთ, რომ თუ $R>2r$ მაშინ L წერტილი არ არის BC მონაკვეთზე.